



SESSION 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

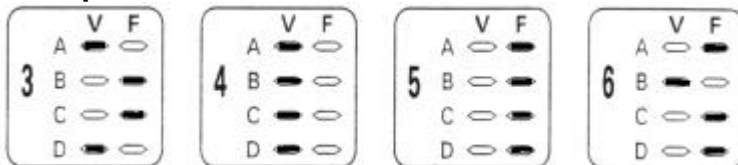
Lisez attentivement les instructions suivantes avant de vous mettre au travail :

Cette épreuve est composée de deux parties :

- exercices n° 1 à 15 pondération 1
- exercices n° 16 à 22 pondération 2

Chaque question comporte quatre propositions, notées **A. B. C. D.**. Pour chaque proposition, vous devez signaler si elle est vraie en l'indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous la lettre **V** ; ou fausse en l'indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous la lettre **F**. Une réponse est donc une suite de quatre marques **V** ou **F**.

Exemples :



L'absence de marque (V, F) ou la mauvaise marque à une proposition n'entraîne pas de points négatifs.

Vous vous servirez de la feuille jointe pour indiquer vos réponses en noircissant les cases situées à côté des lettres correspondantes.

IMPORTANT :

L'utilisation d'une calculatrice est strictement interdite pour cette épreuve.

Nombre de pages de l'épreuve :	7
Durée de l'épreuve :	3 h 00
Coefficient de l'épreuve :	ESSCA → 4 IÉSEG → 5 ESDES → 3,5

Exercices n° 1 à 15 : pondération 1

1) Un groupe de 70 jeunes est réuni dans une salle.

- ✓ Tous sont en pull noir ou rouge, en pantalon ou en jupe, avec des chaussures de sport ou de ville.
- ✓ Tous les garçons sont en pantalon.
- ✓ 42 sont en chaussures de sport.
- ✓ 20% ont un pull noir. Parmi ces 20%, 10 jeunes portent des chaussures de sport. Et, 2 de ces 10 jeunes sont des filles en jupe.
- ✓ Tous ceux qui ont un pull noir sont en pantalon et/ou ont des chaussures de sport.
- ✓ 20% sont des filles en jupe, chaussures de ville et pull rouge.

Ces informations sont suffisantes pour conclure que :

- A.** 56 jeunes sont en pull rouge.
B. 15 jeunes sont en pull rouge, pantalon et chaussures de sport.
C. Les filles sont minoritaires dans le groupe.
D. 20 jeunes sont en pull rouge, pantalon et chaussures de ville.

2) Dans une entreprise de 400 personnes, le salaire moyen est de 65 bols (la monnaie locale). 20% des salariés sont au salaire minimal de 45 bols. Le salaire moyen des hommes est de 70 bols, celui des femmes de 50. A partir de ces informations, on peut conclure que :

- A.** Il y a 30% de femmes dans l'entreprise.
B. Les femmes de l'entreprise touchent moins de 20% de la totalité des salaires.
C. Si l'on ne tenait pas compte des personnes touchant le salaire minimal, le salaire moyen serait de 70 bols.
D. Si l'on augmentait tous les salaires de 10%, le salaire moyen serait supérieur à 70 bols.

3) En 3h, un robinet fournit la même quantité d'eau que fournit un 2^{ème} robinet en 2h30. Ensemble, ils remplissent une cuve de 1650 litres en 1h30.

- A.** Le 2^{ème} robinet a un débit 20% supérieur au 1^{er}.
B. Le débit du 1^{er} robinet est de 450 l/h.
C. Si l'on n'utilise que le 2^{ème} robinet, la cuve se remplirait en 2h45.
D. En utilisant simultanément les 2 robinets pendant 1h et ensuite, en coupant le 2^{ème}, il faudrait encore plus de 1h au 1^{er} robinet pour remplir la cuve.

4) Une personne doit se rendre dans une ville distante de 700 km. Pour ce faire, elle consulte deux agences de location de voitures. La 1^{ère} propose un tarif de y € par km parcouru. La 2^{ème} demande un forfait de 300 € plus x € par km ($x < y$).

- | | | | |
|---|---|--|---|
| <p>A. Il faut parcourir $\frac{300}{y-x}$ km au minimum pour que la 2^{ème} option soit intéressante.</p> | <p>B. Pour les 700 km, la différence de coût entre les deux options est de $700(y-x) + 300$ €</p> | <p>C. Si elle devait effectuer l'aller-retour, la différence de coût entre les deux options serait le double de la différence de coût calculée pour l'aller uniquement.</p> | <p>D. Pour avoir un coût inférieur sur l'aller-retour avec l'option 1, la personne doit négocier x inférieur au minimum de 0,50 € par rapport à y.</p> |
|---|---|--|---|

5) Durant 3 ans, un habitant de Boldurie a consacré la même somme d'argent (x bols chaque année) à l'achat de kg d'or. Il a acheté l'or à 12 bols/kg la première année, à 15 bols/kg la deuxième année et à 20 bols/kg la troisième année. L'année suivante, il a revendu l'ensemble à 16 bols/kg.

- | | | | |
|--|--|--|---|
| <p>A. Il a revendu $\frac{x}{5}$ kg d'or la 4^{ème} année.</p> | <p>B. Son prix moyen d'achat de l'or sur les 3 premières années est de 15,67 bols/kg.</p> | <p>C. Suite à la revente, il a fait un profit de $\frac{x}{5}$ bols.</p> | <p>D. S'il avait pu revendre à 18 bols/kg, il aurait augmenté son profit de 12,5%.</p> |
|--|--|--|---|

6) Vous tentez d'ouvrir un coffre possédant une combinaison à trois chiffres. Vous savez que vous avez le droit au maximum, à six essais avant de déclencher une alarme. A chaque essai, une lampe de couleur s'allume :

- ✓ Verte quand au moins un chiffre est bien placé.
- ✓ Orange quand aucun chiffre n'est bien placé mais qu'au moins un chiffre mal placé appartient à la combinaison.
- ✓ Rouge quand aucun des chiffres proposés n'appartient à la combinaison.

Voici le résultat de quatre premiers essais :

- ✓ Essai 1 : 671 la lampe orange s'allume
- ✓ Essai 2 : 128 la lampe verte s'allume
- ✓ Essai 3 : 429 la lampe orange s'allume
- ✓ Essai 4 : 798 la lampe orange s'allume

Ces informations sont suffisantes pour conclure que :

- | | | | |
|--|--|--|--|
| <p>A. 218 est une combinaison possible.</p> | <p>B. 128 est une combinaison possible.</p> | <p>C. 647 est une combinaison possible.</p> | <p>D. 184 est une combinaison possible.</p> |
|--|--|--|--|

7) Pour la somme de 5 €, vous avez acheté 100 fruits aux prix suivants :

- ✓ des pastèques à 0,50 € la pièce,
- ✓ des pommes à 0,10 € la pièce
- ✓ et des prunes à 0,01 € la pièce.

- A.** Vous avez acheté 50 prunes. **B.** Vous avez versé 4,5 € pour l'achat des pastèques et des pommes. **C.** Vous avez acheté deux pastèques. **D.** Vous avez acheté 48 pommes.

8) Messieurs Boulanger, Pâtissier et Fleuriste sont trois amis qui ont chacun un métier différent parmi les suivants : boulanger, pâtissier et fleuriste. Mais chacun d'eux n'exerce pas nécessairement le métier correspondant à son nom.

Sur les informations qui suivent, une seule est vraie :

- ✓ Monsieur Pâtissier n'est pas boulanger.
- ✓ Monsieur Fleuriste n'est pas pâtissier.
- ✓ Monsieur Pâtissier est pâtissier.
- ✓ Monsieur Fleuriste n'est pas boulanger.

A partir de ces informations, on peut conclure que :

- A.** Monsieur Pâtissier est boulanger. **B.** Monsieur Boulanger est pâtissier. **C.** Monsieur Boulanger est fleuriste. **D.** Monsieur Fleuriste est boulanger.

9) L'escalier roulant d'une gare permet de se déplacer, sans marcher, du niveau des voies jusqu'à la sortie en 1 min 20 s. Si l'escalier roulant est arrêté, le passager met 4 minutes pour parcourir toutes les marches.

- A.** Si la longueur du parcours est de 240 m la vitesse du passager est de 4 km/h. **B.** Si la longueur du parcours est de 100 m la vitesse de l'escalier est de 5,4 km/h. **C.** Si le passager utilise l'escalier en état de marche et en montant lui-même les marches, il mettra 64 s. **D.** Si la longueur de l'escalier est augmentée de 30%, le temps de déplacement de l'escalier augmente de 24 s.

10) Quatre amis (Alain, Bernard, Charles, David) ont chacun une couleur préférée (vert, rouge, blanc, bleu), un animal (chat, lapin, chien, poisson) et une matière préférée (philosophie, économie, anglais, mathématiques). Nous avons, à leur sujet, que :

- Alain préfère le blanc.
- Bernard a un chat.
- Celui qui préfère le bleu a un chien.
- Celui qui a un poisson préfère les mathématiques.
- Celui qui préfère le rouge aime l'économie.
- Charles aime l'anglais.
- David, qui n'aime pas le rouge, a un lapin.

- A.** Celui qui a un chat aime les mathématiques. **B.** David aime la philosophie. **C.** Charles a un chien. **D.** Celui qui a un poisson aime le vert.

11) Une enquête a été réalisée auprès de 1000 foyers sur la possession des appareils suivants : téléviseur, lecteur CD, lecteur DVD. Les résultats obtenus sont les suivants :

- 900 foyers possèdent un téléviseur.
- 500 foyers possèdent un lecteur CD.
- 300 foyers possèdent un lecteur DVD.
- 100 foyers possèdent les trois appareils.
- 150 foyers possèdent un lecteur CD et un lecteur DVD
- 500 foyers ont un téléviseur et pas de lecteur CD.

- A.** 50 foyers ne possèdent qu'un lecteur CD. **B.** 150 ne possèdent que lecteur DVD et téléviseur. **C.** 50 ne possèdent qu'un lecteur DVD. **D.** 500 possèdent exactement deux appareils.

12) Messieurs Lenoir, Leblanc et Lerouge sont professeurs de sport dans une grande école. Chacun enseigne trois spécialités parmi : tennis, judo, foot, basket et rugby. Certaines spécialités sont enseignées par deux personnes, jamais par trois personnes.

- Monsieur Lenoir n'enseigne pas le tennis.
- Monsieur Leblanc est le seul à enseigner le judo.
- Monsieur Lerouge enseigne le foot.

- A.** Monsieur Lenoir n'enseigne pas le basket. **B.** Monsieur Leblanc enseigne le foot. **C.** Monsieur Lerouge n'enseigne pas le tennis. **D.** Monsieur Leblanc enseigne le basket ou le rugby.

13) Un preux chevalier a un rendez-vous à 15 heures précises au château d'une jolie princesse. Il fera le voyage sur son fidèle destrier. Comme il aime beaucoup les mathématiques, il se dit, au moment de partir : « Si mon cheval galope à 15 km/h, j'arriverai une heure trop tôt et s'il galope à 10 km/h j'arriverai une heure trop tard. »

- A.** Pour arriver à l'heure le cheval doit galoper à 12,5 km/h. **B.** La distance parcourue est de 75 km. **C.** Pour arriver à l'heure en galopant à 15 km/h, il doit partir à 10h. **D.** Partant à 10h et pour arriver 30 minutes à l'avance, le cheval doit galoper à 12 km/h.

14) Le Facteur sonne chez M. Cadet Roussel et lui déclare : « Je suis désolé de vous déranger, mais j'ai une lettre pour l'une de vos filles. L'adresse ne comporte pas de prénom et elles ont chacune leur boîte aux lettres. Pouvez-vous me dire quels sont les âges de vos trois filles ? » M. Cadet Roussel lui répond d'un air facétieux : « Je vais vous donner trois informations qui vont vous permettre de trouver vous-même l'âge de chacune de mes filles. Sachez tout d'abord que le produit de leurs âges est égal à 36 ». Le facteur sort alors un stylo et après quelques hésitations et une poignée de secondes trouve 8 solutions possibles : (36 x 1 x 1), (18 x 2 x 1), (12 x 3 x 1), (9 x 4 x 1), (9 x 2 x 2), (6 x 6 x 1), (6 x 3 x 2) et (4 x 3 x 3). M. Cadet Roussel ajoute alors : « Sachez que la somme de leurs âges est égal au numéro de la maison d'en face ». Le facteur traverse alors la rue et revient déçu en lui disant : « Je suis désolé, mais il me manque une information ». Et M. Cadet Roussel de s'esclaffer en lui répondant : « Effectivement, j'ai oublié de vous dire que ma fille aînée est blonde ». A partir de ces informations, on peut conclure que :

- A.** Il y a deux solutions possibles. **B.** L'aînée a 6 ans. **C.** Les 3 filles ont des âges différents. **D.** L'une des filles a 2 ans.

15) Dans une île déserte, un pirate a enterré à quelques mètres de distance les deux sacs d'un trésor.

- ✓ Le sac de jute contient 20 pièces d'or et 30 pièces d'argent,
- ✓ Le sac de cuir contient 20 pièces d'or et 20 pièces d'argent.

Malheureusement pour lui, ayant été capturé, il finit sa vie au bagne sans avoir pu récupérer son magot. Quelques années plus tard, un aventurier qui a entendu parler du trésor, débarque sur cette île et creuse le sol au hasard. La fortune lui sourit puisqu'il trouve un des deux sacs. Il y plonge la main et en sort une pièce.

- A.** La probabilité que cette pièce soit en or est égale à 5/9 **B.** La probabilité que cette pièce soit en argent est égale à 11/20 **C.** Si cette pièce est en or, la probabilité qu'elle soit tirée du sac en cuir est égale à 4/9 **D.** Si cette pièce est en argent, la probabilité qu'elle soit tirée du sac en jute est égale à 5/11

Exercices n° 16 à 22 : pondération 2

16) On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 7 + \frac{6}{\sqrt{x^2 + 3x}}$

A. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble \mathbb{R}

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

D. $f'(x) = 2x + 3 + 3 \left(\frac{2x + 3}{(x^2 + 3x)\sqrt{x^2 + 3x}} \right)$ pour x appartenant à l'ensemble de définition de la fonction f et f' est la fonction dérivée de f

17) Soit f la fonction définie sur l'ensemble $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (2 - \ln x)\ln x$

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

B. $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$ pour $x > 0$ où f' est la fonction dérivée de f

C. L'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une solution unique dans $[1; e]$

D. La fonction f est positive pour $x > 0$

18) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}\right)$ et

g la fonction définie par : $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 1$

A. La fonction g garde le même signe sur l'ensemble \mathbb{R}

B. La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de f , quand x tend vers 0

C. La fonction dérivée f' et la fonction g ont le même signe

D. La fonction f atteint son maximum pour $x = 0,88$

19) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ et $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ où \ln désigne le logarithme népérien

A. La courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine O .

B. F est une primitive de la fonction f

C. f est une fonction strictement croissante

D. L'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ vaut $\ln(1 + \sqrt{2})$

20) On considère le système (S) constitué d'une inéquation et d'une équation où x et y sont deux inconnues réelles et m un réel donné :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ mx + y = 2 \end{cases}$$

- A.** Le système (S) admet des solutions quel que soit le réel m
- B.** Si $m = -\sqrt{3}$ alors le système (S) admet comme solution le couple $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
- C.** Pour que le système (S) admette une solution unique, il faut que m soit égal à $-\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}$
- D.** Si $m < -\sqrt{3}$ ou $m > \sqrt{3}$ alors le système (S) admet une infinité de solutions

21) Dans un plan P muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère la droite D passant par les points $A(2; 1)$ et $B(4; 2)$, T une droite passant par le point $F(2; 4)$ et (C) la courbe représentative d'une fonction réelle f .

De plus, (C) est tangente à la droite D au point A d'abscisse $x_0 = 2$. (C) , D et T se coupent en un point d'abscisse $x_1 = 6$

- A.** $f(2) = 1$
- B.** Le nombre dérivé de f au point A d'abscisse $x_0 = 2$ vaut 2
- C.** $f(6) = 1$
- D.** L'équation cartésienne de la droite T est : $y = 3x - 15$

22) On sait que 3% d'un grand nombre de pièces sont défectueuses. On les contrôle avec deux systèmes soit S1, soit S2.

- ✓ Le système S1 accepte 95% des bonnes pièces et rejette 98% des pièces défectueuses.
- ✓ Le système S2 accepte 97% des pièces mais 1% des pièces acceptées sont défectueuses.

- A.** La probabilité d'erreur dans le contrôle par S1 est de 0,0491
- B.** La probabilité qu'une pièce refusée par S1 soit bonne est de 0,2
- C.** La probabilité qu'une pièce soit acceptée et défectueuse par S2 est de 0,0097
- D.** La probabilité qu'une pièce soit bonne et acceptée par S2 est de 0,98