ANNALES OFFICIELLES 2011

CONCOURS ECRICOME **PREPA**

ÉPREUVE ***ÉCRITE***

ÉPREUVE **SPÉCIFIQUE**

OPTION SCIENTIFIQUE

Mathématiques

ECRICOME

VISER PLUS HAUT

www.ecricome.org

Esprit général

Vérifier ches les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

Deux exercices d'application des connaissances de base ;
un problème faisant largement appel aux possiblités.

Evaluation

Deux exercices de valeurs sensiblement égale ;
12 à 14 points pour le problème.

Epreuve

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

EXERCICE 1.

Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout entier naturel j, on note $P^{(j)}$ la dérivée j-ième de P.

On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall k \in \{1, .., n\}, \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. (a) Prouver que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.

   (b) Montrer que pour tout entier k appartenant à $\{1, .., n\}$, on a :

   $$P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$$

   puis, pour tous les entiers k, j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, donner une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$.

   (c) Soit $P \in E$, justifier l'existence d'un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, .., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

   $$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$$

   puis établir que :

   $$\forall j \in \{0, 1, .., n\}, \quad P^{(j)}(j) = a_j.$$

   Ainsi on a établi la relation :

   $$\forall P \in E, \quad P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)P_k.$$

2. On considère l'application u définie sur E par :

   $$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = P'(X+1).$$

   (a) Etablir que u est un endomorphisme de E.

   (b) Ecrire la matrice A de l'endomorphisme u dans la base $(P_0, P_1, .., P_n)$ de E.

(c) Déterminer le rang de A ainsi que ses valeurs propres.

(d) La matrice A est-elle diagonalisable ? (*Une réponse argumentée est attendue*)

3. On définit sur $E \times E$ l'application $\langle .,. \rangle$ par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k).$$

(a) Démontrer que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

(b) Justifier que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base orthonormale de E.

EXERCICE 2.

On considère :

- la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \frac{\exp(t) - 1}{t} - t\left(\exp\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right).$$

- la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$

- U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$U =]0, +\infty[^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x > 0 \text{ et } y > 0\right\}.$$

- $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur l'ouvert U et à valeurs réelles par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = x^y - y^x = \exp(y\ln(x)) - \exp(x\ln(y)).$$

où $\exp(s)$ désigne l'exponentielle du réel s c'est-à-dire que $\exp(s) = e^s$. On admet que f est de classe C^2 sur U.

L'objectif de cet exercice est de prouver que la fonction f n'admet aucun extremum sur U.

1. Etudier les variations de ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $\psi(1)$ et préciser le signe de ψ.

2. Prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.

3. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ en fonction de $\varphi(t)$ et $\ln(t)$. *On admettra la convergence de cette série.*

4. Justifier que :
$$\forall t \in \left]0,1\right[, \quad \varphi(t) < \ln(t), \quad \forall t \in \left]1,+\infty\right[, \quad \varphi(t) > \ln(t).$$

5. Soit $(x,y) \in U$. Montrer que (x,y) est un point critique de f si et seulement si :
$$\begin{cases} x > 1, \quad y > 1; \\ \ln(x)\ln(y) = 1; \\ y^{x-1} = x^{y-1}\ln(x). \end{cases} .$$

6. Soit $(x,y) \in U$ un point critique de f. Justifier l'existence d'un réel $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\begin{cases} x = \exp(t), \quad y = \exp\left(\frac{1}{t}\right); \\ \varphi(t) = \ln(t). \end{cases}$$

7. Prouver que (e,e) est l'unique point critique de f.

8. En comparant les signes des fonctions $t \mapsto f(e, e+t)$ et $t \mapsto f(e+t, e)$, justifier que f n'admet aucun extremum sur U.

PROBLEME

La partie **I** consiste à justifier que les variables $Y_n = \max(X_1, .., X_n)$ et $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}$ possèdent la même loi lorsque $(X_1, .., X_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

La partie **II** a pour objectif d'établir que, pour chaque variable aléatoire X possédant une densité f avec f continue sur $\mathbb{R}_+$ et f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il n'existe aucune variable aléatoire Y à densité dérivable g sur $\mathbb{R}^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$.

La partie **III** consistera à étudier les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire introduite à la partie **II.**.

Les parties **I**, **II** et **III** sont largement indépendantes.

PARTIE I. Etude des variables Y_n et Z_n.

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire, rappelons que :

- F_X désigne sa fonction de répartition définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = P(X \leqslant t)$.

- X suit la loi exponentielle de paramètre $a \in \left]0, +\infty\right[$ si et seulement si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ 1 - \exp(-at) & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

  où $\exp(y)$ désigne l'exponentielle du réel y c'est-à-dire que : $\exp(y) = e^y$.

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$\begin{aligned} Y_n &= \max(X_1, X_2, .., X_n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i, \\ Z_n &= \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \cdots + \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}. \end{aligned}$$

où $\max(X_1, .., X_n)$ désigne le maximum des valeurs de $X_1, .., X_n$.

Pour finir, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(t) = 0 \text{ si } t < 0; \\ f_n(t) = n.\exp(-t)\left(1 - \exp(-t)\right)^{n-1} \ \text{ si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

1. On considère un tableau X de nombres réels de taille 2011 (*c'est-à-dire «X = array[1...2011] of real»*) préalablement rempli.

   (a) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant les réels :

$$\max(X[1], X[2]) \quad \text{et} \quad \max(X[1], X[2], X[3]).$$

(b) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant le réel :

$$\max\left(X[1], X[2], .., X[2011]\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant 2011}\left(X[i]\right).$$

2. (a) Pour tout réel t, exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ à l'aide des réels $F_{X_1}(t)$, ... , $F_{X_n}(t)$.
   (b) Pour tout réel t, donner alors l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et t en distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geqslant 0$.
   (c) Vérifier alors que la fonction f_n est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n.

3. (a) Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.
   (b) Démontrer que $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1}.

4. Pour tout réel x, vérifier que : $\displaystyle\int_0^x n.\exp(nt)\left(1-\exp(-t)\right)^{n-1} dt = \left(\exp(x)-1\right)^n.$

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité. **Indication** : *Pour l'hérédité, on remarquera que* $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

On désigne par E l'ensemble des fonctions f continues de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge. On admet que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour toute fonction f appartenant à E, on considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{D}_f) : y - y' = f$$

dont l'inconnue est la fonction $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On fixe dans cette partie une fonction f appartenant à E. Pour tout réel positif x, on note :

$$k_f(x) = \exp(x)\int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t)dt.$$

1. Soient φ, ψ deux fonctions appartenant à E, dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant l'équation $(\mathcal{D}_f)$. On introduit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = (\varphi(x) - \psi(x)) \exp(-x)$$

   (a) Prouver que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) En utilisant le fait que la fonction $\varphi - \psi$ appartient à E, montrer que $\varphi = \psi$.

   Nous avons ainsi établi qu'il existe au plus une solution dans E à l'équation $(\mathcal{D}_f)$ lorsque $f \in E$.

2. Pour tout réel positif x, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t)dt$.

3. Etablir que la fonction $k_f : x \mapsto \exp(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t)\ f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k_f(x) - k_f'(x) = f(x).$$

4. On suppose uniquement dans cette question que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geqslant 0.$$

   (a) Vérifier les relations suivantes :

$$(\alpha) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant k_f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} f(t)dt,$$

$$(\beta) \ : \ \forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A k_f(x)dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)dx$$

   (b) Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_f(x)dx$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} k_f(x)dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x))\, f(x)dx.$$

5. On revient au cas général où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ prend des valeurs non nécessairement positives.

   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |k_f(x)|\, dx$ converge.

6. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f avec f continue sur $\mathbb{R}_+$ et f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Justifier qu'il n'existe aucune densité g dérivable sur $\mathbb{R}^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE III. Etude de l'application $f \mapsto k_f$.

A la partie **II**, on a établi que si f appartient à E, il existe une unique fonction

$$k_f : x \mapsto \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t) dt$$

appartenant à E telle que :

$$k_f - k_f' = f.$$

On considère alors l'application φ définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = k_f.$$

1. Etablir que φ est un endomorphisme de E.

   Définition : *On dit que le réel λ est valeur propre de φ s'il existe une fonction f de E non identiquement nulle telle que $\varphi(f) = \lambda f$. On dit que f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ et on appelle sous-espace propre de φ associé à λ l'espace vectoriel*

   $$E_\lambda(\varphi) = \{f \in E \quad \textit{telle que} \quad \varphi(f) = \lambda f\}$$

   La suite de cette partie est consacrée à la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres de φ.

2. Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_a(x) = \exp(-ax).$$

   Vérifier que f_a appartient à E, que f_a est un vecteur propre de φ et préciser la valeur propre associée.

3. Soit λ une valeur propre de φ et $f \in E$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

   (a) Montrer que λ est nécessairement non nul.

   (b) Etablir que f est dérivable et vérifie l'équation différentielle : $f' = \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) f$.

   (c) Pour tout réel positif x, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de λ, x et d'une certaine constante.

   (d) Montrer que $\lambda \in]0, 1[$.

4. Préciser l'ensemble $\mathrm{Sp}(\varphi)$ des valeurs propres de φ et, pour chaque valeur propre λ de φ, proposer une base de l'espace propre $E_\lambda(\varphi)$.

CORRIGÉ

EXERCICE 1.

1. (a) Puisque $\forall k \in \{0,..,n\}$, $\deg(P_k) = k$, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est échelonnée en degré donc libre. En outre, elle est constituée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.

   (b) Un calcul direct montre pour $k \geqslant 1$ que :

$$\begin{aligned} P_k'(X) &= \frac{(X-k)^{k-1} + X(k-1)(X-k)^{k-2}}{k!} \\ &= \frac{(X-k)^{k-2}}{k!}\left[(X-k)+(k-1)X\right] \\ &= \frac{(X-k)^{k-2}}{k!}k(X-1) = \frac{(X-k)^{k-2}}{(k-1)!}(X-1) \end{aligned}$$

   d'où l'égalité :

$$P_k'(X+1) = \frac{(X+1-k)^{k-2}}{(k-1)!}X = \frac{X(X-(k-1))^{k-2}}{(k-1)!} = P_{k-1}(X)$$

   En particulier, on obtient :

$$P_k'(X) = P_{k-1}(X-1).$$

   En dérivant cette relation, on a :

$$P_k''(X) = P_{k-1}'(X-1) = P_{k-2}((X-1)-1) = P_{k-2}(X-2)$$

   En dérivant de nouveau la relation, on peut écrire :

$$P_k^{(3)}(X) = P_{k-2}'(X-2) = P_{k-3}((X-2)-2) = P_{k-3}(X-3).$$

   Si l'on fixe $k \in \{1,..,n\}$, une récurrence immédiate sur $j \in \{1,..,k\}$ montre que

$$P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j).$$

   (c) Le polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ et la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on peut affirmer l'existence d'un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, .., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$$

   En évaluant cette relation en 0 et tenant compte que $P_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$ et $P_0(0) = 1$, on obtient

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k(0) = a_0.$$

   Soit $j \in \{1,..,n\}$. En dérivant j fois la relation $P = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$, on obtient

$$P^{(j)}(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k^{(j)}(X)$$

Puisque $\deg(P_k)=k$, si $k<j$ alors $P_k^{(j)}=0$ donc l'égalité ci-dessus devient :

$$P^{(j)}(X)=\sum_{k=j}^{n}a_kP_k^{(j)}(X)\Rightarrow P^{(j)}(j)=\sum_{k=j}^{n}a_kP_k^{(j)}(j)\underset{1\leqslant j\leqslant k}{=}\sum_{k=j}^{n}a_kP_{k-j}(X-j).$$

On évalue alors en j cette relation ce qui nous donne :

$$P^{(j)}(j)=\sum_{k=j}^{n}a_kP_{k-j}(0)=a_j$$

car $P_{k-j}(0)=0$ si $k-j\geqslant 1$ et $P_{k-j}(0)=P_0(0)=1$ si $k-j=0$.

2. (a) Pour tous polynômes P,Q de $\mathbb{R}_n[X]$ et tous réels λ,μ, on a :

$$\begin{aligned}u(\lambda P+\mu Q)&=(\lambda P+\mu Q)'(X+1)=\lambda P'(X+1)+\mu Q'(X+1)\\&=\lambda u(P)+\mu u(Q)\end{aligned}$$

donc u est bien linéaire. En outre, puisque $P\in\mathbb{R}_n[X]$ c'est-à-dire que P est un polynôme de degré au plus n, P' est un polynôme de degré au plus $n-1$ donc de degré au plus n ce qui entraine que $P'(X+1)=u(P)$ est un polynôme de degré au plus n. Par conséquent, on vient de montrer que si $P\in\mathbb{R}_n[X]$ alors $u(P)\in\mathbb{R}_n[X]$ et comme u est linéaire, on peut affirmer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Si $k=0$, on a $P_0=1$ donc $P_0'=0$ ce qui montre que

$$u(P_0)(X)=P_0'(X+1)=0$$

Si $k\in\{1,..,n\}$, on a :

$$u(P_k)(X)=P_k'(X+1)=P_{k-1}(X)$$

ce qui permet d'écrire la matrice A :

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}u(P_0)&u(P_1)&u(P_2)&&&u(P_k)&&&u(P_n)\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&\cdots&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&&\vdots&&&\vdots\\0&0&0&\ddots&\ddots&\vdots&&&\vdots\\0&\vdots&0&\ddots&\ddots&0&&&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1&\ddots&&\vdots\\0&0&0&&&0&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&&&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&&&\ddots&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}P_0\\P_1\\P_2\\\vdots\\P_{k-1}\\P_k\\\vdots\\P_{n-1}\\P_n\end{array}$$

(c) Le rang de la matrice A est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. Etant donné que sa première colonne est nulle et que les autres vecteurs colonnes forment une famille extraite de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que les autres vecteurs colonnes forment une famille libre. Puisqu'ils sont au nombre de n, on en déduit que la matrice A est de rang n.
La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux donc 0 est l'unique valeur propre de A.

(d) Puisque 0 est la seule valeur propre de A, si A est diagonalisable alors il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P\,\mathrm{diag}\,(0,..,0)\,P^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n$$

ce qui est absurde donc A n'est pas diagonalisable.

3. (a) Pour tous les polynômes $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la quantité (P, Q) a bien un sens et l'on a :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k)P^{(k)}(k) = \langle Q, P\rangle$$

d'où la symétrie

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + \mu Q, R\rangle &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + \mu Q)^{(k)}(k)R^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P^{(k)}(k) + \mu Q^{(k)}(k)\right) R^{(k)}(k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)R^{(k)}(k) + \mu \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k)R^{(k)}(k) = \lambda \langle P, R\rangle + \mu \langle Q, R\rangle\end{aligned}$$

d'où le caractère linéaire de $P \mapsto \langle P, Q\rangle$ et par symétrie, le caractère linéaire de $Q \mapsto \langle P, Q\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle P, P\rangle &= \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(k)\right)^2 \geqslant 0, \quad (P, P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(P^{(k)}(k)\right)^2}_{\geqslant 0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \left(P^{(k)}(k)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P^{(k)}(k) = 0\end{aligned}$$

D'après la question **1.c**, on peut écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)P_k = \sum_{k=0}^{n} 0P_k = 0$$

donc $\langle , \rangle$ est bien un produit scalaire.

(b) On commence par rappeler que $P_i^{(k)}(X) = 0$ si $k > i$ (car $\deg P_i = i$) donc $P_i^{(k)}(i) = 0$ si $k > i$. Si $k \leqslant i$, d'après la question **1.b**, on a

$$P_i^{(k)}(X) = P_{i-k}(X - k)$$

donc on peut écrire

$$P_i^{(k)}(k) = P_{i-k}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k < i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases}$$

Au final, on a $P_i^{(k)}(k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases}$ donc le produit $P_i^{(k)}(k)P_j^{(k)}(k)$ n'est pas nul si et seulement si lorsque $k = i$ et $k = j$ (ce qui entraine automatiquement que $i = j$). Par conséquent, si $i \neq j$ chacun des produits $P_i^{(k)}(k)P_j^{(k)}(k)$ est toujours nul donc

$$\langle P_i, P_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0 \text{ si } i \neq j$$

Par contre, si $i = j$, on a :

$$\langle P_i, P_i\rangle = \sum_{k\neq i}^{n} \underbrace{P_i^{(k)}(k)P_j^{(k)}(k)}_{=0} + \underbrace{P_i^{(i)}(i)P_i^{(i)}(i)}_{=1*1=1} = 1$$

donc la famille $(P_0, .., P_n)$ est une famille orthonormale et comme c'est une base, on peut affirmer qu'il s'agit d'une base orthonormale de E.

EXERCICE 2

1. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme somme de telles fonctions) et
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{1+t^2-t}{t^2}.$$
Etant donné que le trinôme $t^2 - t + 1$ admet un discriminant $\Delta = 1^2 - 4.1 = -3 < 0$ et son coefficient dominant étant strictement positif, on peut affirmer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 - t + 1 > 0 \Rightarrow \psi'(t) > 0.$$
En particulier, la fonction ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\psi(1) = 0$, on en déduit que :
$$\forall t \in \left]0,1\right[, \quad \psi(t) < \psi(1) = 0, \quad \forall t \in \left]1,+\infty\right[, \quad \psi(t) > \psi(1) = 0$$

2. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}$ est convergente (série exponentielle) et la série
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n!} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \underset{p=n-1}{=} \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!}$$
aussi. On est assuré de la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1}{n!}$ et l'on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

3. Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^{n-1}}{n!} = \frac{1}{t} \sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1}{n!}$ étant convergente pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ converge et l'on a :
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} - \frac{1}{t^{n-1}} - (n-1)\ln(t)}{n!} \\
&= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} - t \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^n . \frac{1}{n!} - \ln(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)}{n!} \\
&= \frac{1}{t}\left(e^t - 1\right) - t\left(e^{1/t} - 1\right) - \ln(t) = \varphi(t) - \ln(t).
\end{aligned}$$

4. Etant donné que
$$t^{1-1} - \frac{1}{t^{1-1}} - (1-1)\ln(t) = 1 - 1 - 0 = 0$$
et que
$$\begin{aligned}
\forall t &\in \left]0,1\right[, \quad \forall n \geqslant 2, \quad t^{n-1} \in \left]0,1\right[, \quad \psi(t^{n-1}) < 0 \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \psi(t^{n-1}) < 0 \Leftrightarrow \varphi(t) - \ln(t) < 0 \Leftrightarrow \varphi(t) < \ln(t) \\
\forall t &\in \left]1,+\infty\right[, \quad \forall n \geqslant 2, \quad t^{n-1} \in \left]1,+\infty\right[, \quad \psi(t^{n-1}) > 0 \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \psi(t^{n-1}) > 0 \Leftrightarrow \varphi(t) - \ln(t) > 0 \Leftrightarrow \varphi(t) > \ln(t)
\end{aligned}$$

5. Puisque f est de classe C^1 sur l'ouvert U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\exp\left(y\ln(x)\right)-\ln(y)\exp\left(x\ln(y)\right)=0 \\ \ln(x)\exp\left(y\ln(x)\right)-\dfrac{x}{y}\exp\left(x\ln(y)\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}.x^y-\ln(y)y^x=0 \\ \ln(x)x^y-\dfrac{x}{y}.y^x=0 \end{cases}$$

$$\underset{x,y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \ln(y)=\dfrac{y}{x}.\dfrac{x^y}{y^x} \\ \ln(x)=\dfrac{x}{y}.\dfrac{y^x}{x^y}=\dfrac{1}{\dfrac{y}{x}.\dfrac{x^y}{y^x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y)>0 \text{ et } \ln(x)>0 \\ \ln(y)\ln(x)=1 \\ \ln(x)\dfrac{x^y}{x}=\dfrac{y^x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \quad y>1 \\ \ln(y)\ln(x)=1 \\ \ln(x)x^{y-1}=y^{x-1} \end{cases}$$

6. Etant donné que $x>1$, il existe $t>0$ tel que $x=e^t$. En outre, on a

$$\ln(x)\ln(y)=1 \Leftrightarrow t\ln(y)=1 \Leftrightarrow \ln(y)=\frac{1}{t} \Leftrightarrow y=e^{1/t}.$$

En composant par le logarithme népérien la dernière égalité de la question précédente, on obtient :

$$\ln(\ln(x))+(y-1)\ln(x)=(x-1)\ln(y) \Leftrightarrow \ln(t)+t(e^{1/t}-1)=\frac{e^t-1}{t} \Leftrightarrow \ln(t)=\varphi(t).$$

7. Puisque l'équation $\varphi(t)=\ln(t) \Leftrightarrow \varphi(t)-\ln(t)=0$ n'admet que $t=1$ pour solution (d'après la question 4 et du fait que $\varphi(1)=0$), on en déduit que $\left(e^1,e^{1/1}\right)=(e,e)$ est l'unique point critique possible de f. En outre, il s'agit bien d'un point critique car

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(e,e)=\dfrac{e}{e}\exp\left(e\ln(e)\right)-\ln(e)\exp\left(e\ln(e)\right)=e^e-e^e=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\ln(e)\exp\left(e\ln(e)\right)-\dfrac{e}{e}\exp\left(e\ln(e)\right)=e^e-e^e=0 \end{cases}$$

8. Il est immédiat que pour tout réel t,

$$f(e,e+t)=e^{e+t}-(e+t)^e, \quad f(e+t,e)=(e+t)^e-e^{e+t}=-f(e,e+t).$$

Si (e,e) était un minimum local de f sur U alors, pour t suffisamment petit, on aurait

$$f\left(e,e+t\right)\geqslant f(e,e)=e^e-e^e=0 \Rightarrow f(e+t,e)=-f(e,e+t)\leqslant 0.$$

Or $f(e,e+t)\geqslant f(e,e)=0$ donc $f(e,e+t)=0$ serait nul au voisinage de 0 ce qui est absurde car :

$$\begin{aligned} f(e,e+t) &= 0 \Leftrightarrow e^{e+t}-(e+t)^e=0 \Leftrightarrow e^{e+t}=(e+t)^e \\ &\Leftrightarrow (e+t)\ln(e)=e\ln(e+t) \Leftrightarrow e+t=e\ln(e+t) \\ &\Leftrightarrow 1+\frac{t}{e}=\ln\left(e+t\right)=\ln\left(e\left(1+\frac{t}{e}\right)\right)=\ln(e)+\ln\left(1+\frac{t}{e}\right) \\ &\Leftrightarrow 1+\frac{t}{e}=1+\ln\left(1+\frac{t}{e}\right) \Leftrightarrow \frac{t}{e}=\ln\left(1+\frac{t}{e}\right) \Rightarrow \frac{t}{e}=0 \Leftrightarrow t=0 \end{aligned}$$

(faire une étude de la fonction $x\mapsto x-\ln(1+x)$). Par le même argumentaire, on obtient que (e,e) ne peut être un maximum local de f sur U donc f n'admet aucun extrémum sur U.

PROBLEME

PARTIE I. Etude des variables Y_n et Z_n

1. (a) var a,b : real;
If X[1] < X[2] then a :=X[2] else a :=X[1]
if a < X[3] then b := X[3] else b :=a;
writeln('max(X[1],X[2] =', a, 'max(X[1],X[2],X[3]) =', b);
end.

   (b) var a : real; var k : integer;
a: = X[1];
for k=2 to 2011 do
If a<X[k] then a :=X[k];
writeln('max(X[1],..,X[2011] =', a);
end.

2. (a) Etant donné que :

$$\max(X_1, .., X_n) \leqslant t \Leftrightarrow (X_1 \leqslant t) \cap (X_2 \leqslant t) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant t)$$

et que les variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes, on est assuré que les événements $(X_1 \leqslant t), .., (X_n \leqslant t)$ sont également mutuellement indépendants ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= P(Y_n \leqslant t) = P((X_1 \leqslant t) \cap (X_2 \leqslant t) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant t)) \\ &= P(X_1 \leqslant t)P(X_2 \leqslant t)\cdots P(X_n \leqslant t) = F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)\cdots F_{X_n}(t). \end{aligned}$$

   (b) Si $t < 0$ alors

$$\forall i \in \{1, ., n\}, \quad F_{X_i}(t) = 0 \Rightarrow F_{Y_n}(t) = 0.$$

Si $t \geqslant 0$ alors

$$\forall i \in \{1, .., n\}, \quad P(X_i \leqslant t) = 1 - \exp(-t) \Rightarrow F_{Y_n}(t) = (1 - \exp(-t))^n.$$

   (c) La fonction F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^-} F_{Y_n}(t) &= \lim_{t\to 0^-} 0 = 0 = F_{Y_n}(0), \\ \lim_{t\to 0^+} F_{Y_n}(t) &= \lim_{t\to 0^+} (1 - \exp(-t))^n = (1 - \exp(0))^n = 0 = F_{Y_n}(0) \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{0} F_{Y_n} = F_{Y_n}(0)$ ce qui assure la continuité de F_{Y_n} sur $\mathbb{R}$. En outre, cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc la fonction

$$t \in \mathbb{R}^* \mapsto F'_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ -n\left(-e^{-t}\right)\left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n donc la fonction f_n est aussi une densité de probabilté de la variable aléatoire Y_n.

3. (a) Pour tout réel t, on a

$$P\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leqslant t\right) = P\left(X_{n+1} \leqslant (n+1)t\right) = F_{X_{n+1}}((n+1)t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 - e^{-(n+1)t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

(b) La fonction $F_{X_{n+1}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit qu'il en est de même de $t \mapsto F_{X_{n+1}}((n+1)t)$. Par conséquent, la variable $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ admet une densité égale sur $\mathbb{R}^*$ à

$$\left(t \mapsto F_{X_{n+1}}((n+1)t\right)' = (t \mapsto (n+1)f_{n+1}(t)) = t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ (n+1)e^{-(n+1)t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction $d_n : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ (n+1)e^{-(n+1)t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$ est donc une densité de la variable $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

4. On remarque que

$$\int_0^s n.\exp(t)\left(\exp(t)\right)^{n-1}\left(1-\exp(-t)\right)^{n-1} dt = \int_0^s n.\exp(t)\left[\exp(t)\left(1-\exp(-t)\right)\right]^{n-1} dt$$

$$= \int_0^s n.\exp(t)\left[\exp(t)-1\right]^{n-1} dt = \int_0^s \left((\exp(t)-1)^n\right)' dt = \left[(\exp(t)-1)^n\right]_0^s = (\exp(s)-1)^n .$$

5. Pour $n = 1$, la variable $Z_1 = X_1$ admet bien une densité. Supposons la proposition vérifiée pour un certain entier n. Puisque Z_n est une variable aléatoire à densité f_n, que $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est également une variable aléatoire à densité et ces deux variables aléatoires sont indépendantes, on en déduit que la variable aléatoire $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ admet une densité h_{n+1} définie par : $h_{n+1} = f_n * d_n$ c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) d_n(x-t) dt$$

Remarquons que le produit $f_n(t)d_n(x-t)$ est non nul si et seulement

$$\begin{cases} f_n(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0 \\ d_n(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow x-t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant x.$$

Par conséquent, on obtient que $\forall x < 0, \quad h_{n+1}(x) = 0$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= \int_0^x f_n(t)d_n(x-t)dt = \int_0^x n.\exp(-t)\left(1-\exp(-t)\right)^{n-1}(n+1)\exp\left(-(n+1)(x-t)\right) dt \\ &= (n+1)\exp\left(-(n+1)x\right)\int_0^x n\underbrace{\exp\left(-t+(n+1)t\right)}_{=\exp(nt)}\left(1-\exp(-t)\right)^{n-1} dt \\ &= (n+1)\exp\left(-(n+1)x\right)\left(\exp(x)-1\right)^n = (n+1)\exp(-x)\left(\exp(-x)\right)^n\left(\exp(x)-1\right)^n \\ &= (n+1)\exp(-x)\left[\exp(-x)\left(\exp(x)-1\right)\right]^n = (n+1)\exp(-x)\exp\left(1-\exp(-x)\right)^n = f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Autrement dit, on obtient bien que f_{n+1} est une densité de la variable aléatoire Z_{n+1} ce qui achève la récurrence.

PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle

1. (a) La fonction h est dérivable (comme somme et produit de telles fonctions) et pour tout réel x positif, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\varphi'(x)-\psi'(x))\exp(-x)-(\varphi(x)-\psi(x))\exp(-x) \\ &= \exp(-x)\left[\varphi'(x)-\varphi(x)-\psi'(x)+\psi(x)\right]=\exp(-x)\left(f(x)-f(x)\right)=0 \end{aligned}$$

donc la fonction h est constante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On en déduit que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad h(x)=h(0)\Leftrightarrow \varphi(x)-\psi(x)=h(0)\exp(x)$$

La fonction $\varphi-\psi$ appartenant à E, on en déduit que la fonction $x\mapsto h(0)\exp(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ce qui est impossible sauf si

$$h(0)=0\Leftrightarrow h=0\Leftrightarrow \varphi=\psi.$$

2. La fonction $t\mapsto\exp(-t)\,f(t)$ est continue sur $[x,+\infty[$ et

$$\forall t\in[x,+\infty[,\quad |\exp(-t)f(t)|=\exp(-t)\,|f(t)|\leqslant|f(t)|.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}|f(t)|\,dt$ étant convergente (car $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt$ converge et $x\geqslant 0$), on en déduit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}|\exp(-t)f(t)|\,dt$ donc de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\exp(-t)f(t)dt$.

3. On commence par remarquer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad k_f(x)=\exp(x)\left(\int_0^{+\infty}\exp(-t)f(t)dt-\int_0^{x}\exp(-t)\,f(t)dt\right).$$

La fonction $t\mapsto\exp(-t)\,f(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $F:x\mapsto\displaystyle\int_0^x\exp(-t)\,f(t)dt$ est une primitive de cette fonction donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que la fonction $\exp$. Par conséquent, la fonction k_f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (comme somme et produit de telles fonctions) et l'on a pour tout réel x positif :

$$\begin{aligned} k_f'(x) &= \exp(x)\left(\int_0^{+\infty}\exp(-t)f(t)dt-\int_0^{x}\exp(-t)\,f(t)dt\right)+\exp(x)\left(-\exp(-x)\,f(x)\right) \\ &= k_f(x)-f(x)\Rightarrow k_f(x)-k_f'(x)=f(x). \end{aligned}$$

4. (a) La fonction $t\mapsto\exp(-t)$ étant décroissante sur $\mathbb{R}$,,on a

$$\begin{aligned} \forall t\ \in\ [x,+\infty[,\quad 0\leqslant\exp(-t)\leqslant\exp(-x) &\underset{\times f(t)\geqslant 0}{\Rightarrow} 0\leqslant\exp(-t)\,f(t)\leqslant\exp(-x)f(t) \\ \Rightarrow\ 0\leqslant\int_x^{+\infty}\exp(-t)\,f(t)\leqslant\exp(-x)\int_x^{+\infty}f(t)dt &\underset{\times\exp(x)>0}{\Rightarrow} 0\leqslant k_f(x)\leqslant\int_x^{+\infty}f(t)dt. \end{aligned}$$

Etant donné que $k_f = k_f' + f$, on a :

$$\int_0^A k_f(x)dx = \int_0^A k_f'(x)dx + \int_0^A f(x)dx = [k_f(x)]_0^A + \int_0^A f(x)dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)dx.$$

(b) Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, on est assuré que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)dt = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} k_f(x) = 0$ (d'après l'encadrement de la question précédente). En outre, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ (car cette dernière intégrale est convergente) donc

$$\begin{aligned}\lim_{A\to+\infty}\left(k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)dx\right) &= -k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{+\infty} \exp(-x)\, f(x) + \int_0^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x))\, f(x)dx.\end{aligned}$$

La fonction k_f étant continue sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable sur cet intervalle) et

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A k_f(x)dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x))\, f(x)dx,$$

on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} k_f(x)dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} k_f(x)dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x))\, f(x)dx$$

5. La fonction k_f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |k_f(x)| = \exp(x)\left|\int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t)dt\right| \leqslant \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, |f(t)|\, dt = k_{|f|}(x).$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} k_{|f|}(x)dx$ étant convergente (d'après la question précédente et le fait que $|f|$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$), on en déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} |k_f(x)|\, dx$.

6. On raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'une telle densité. Alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge sa valeur est 1. Autrement dit $f \in E$ donc, d'après les

questions précédentes, la fonction g est égale à k_f et est positive. On a alors :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} k_f(x)dx = \int_0^{+\infty} (1-\exp(-x))\, f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx - \int_0^{+\infty} \exp(-x)\, f(x)dx \\ &= 1 - \int_0^{+\infty} \exp(-x)\, f(x)dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} \exp(-x)\, f(x)dx = 0. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \exp(-x)\, f(x)$ étant continue, positive et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \exp(-x)\, f(x) = 0 \underset{\times \exp(x)}{\Rightarrow} f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 \neq 1$$

ce qui est absurde. Par conséquent, il n'existe aucune densité g dérivable sur $\mathbb{R}^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE III. Etude de $f \mapsto k_f$

1. Si $f \in E$ alors, d'après la partie **II**, $\varphi(f) = k_f \in E$. Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors pour tout réel x positif :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= k_{\lambda f + \mu g}(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, (\lambda f + \mu g)(t)dt \\ &= \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \exp(x) \int_x^{+\infty} (\lambda \exp(-t)\, f(t) + \mu \exp(-t)\, g(t))\, dt \\ &= \lambda \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t)dt + \mu \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, g(t)dt = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x). \end{aligned}$$

   Ainsi φ est linéaire, $\varphi(E) \subset E$ donc φ est un endomorphisme de E.

2. La fonction f_a n'est pas nulle et pour tout réel x positif, on a

$$\begin{aligned} \varphi(f_a)(x) &= \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\exp(-at)\, dt = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-(1+a)t)\, dt \\ &= \exp(x) \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{\exp(-(1+a)t)}{-(1+a)} \right]_{t=x}^{t=A} = \exp(x) \frac{\exp(-(1+a)x)}{1+a} \\ &= \frac{\exp(-ax)}{1+a} = \frac{1}{1+a} f_a(x) \Rightarrow \varphi(f_a) = \frac{1}{1+a} f_a. \end{aligned}$$

   Ainsi f_a est bien un vecteur de φ associé à la valeur propre $\dfrac{1}{1+a}$.

3. (a) On procède par l'absurde en supposant que $\lambda = 0$ alors

$$\varphi(f) = 0 \Leftrightarrow k_f = 0 \Rightarrow f = k_f - k_f' = 0$$

   ce qui contredit le fait que $f \neq 0$ (car f est un vecteur propre) donc $\lambda \neq 0$.

(b) Un calcul direct montre que :

$$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow k_f = \lambda f \Rightarrow f = \frac{1}{\lambda} k_f.$$

La fonction $f \in E$ donc la fonction k_f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ce qui assure la dérivabilité de f. En utilisant l'équation différentielle vérifiée par k_f, on a :

$$f = k_f - k_f' = \lambda f - \lambda f' \Rightarrow \lambda f' = (\lambda - 1) f \Rightarrow f' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} f = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$$

(c) Il existe donc un réel C tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = C \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x\right)$.

(d) La fonction $g : x \mapsto \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x\right)$ étant continue et l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left|\exp\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x\right)\right| dx = \int_0^{+\infty} \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x\right) dx$$

converge si et seulement si

$$1 - \frac{1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} > 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1.$$

Comme $f \neq 0$, on est assuré que $C \neq 0$ donc

$$f \in E \Leftrightarrow \frac{f}{C} \in E \Leftrightarrow g \in E \Leftrightarrow \lambda \in \left]0, 1\right[$$

4. A la question 2, on a établi que l'inclusion $\left\{\frac{1}{1+a}, \quad a \in \mathbb{R}_+^{\setminus}\right\} \subset \mathrm{Sp}(\varphi) \Leftrightarrow \left]0, 1\right[\subset \mathrm{Sp}(\varphi)$. A la question 3, on établit l'inclusion réciproque donc $\mathrm{Sp}(\varphi) = \left]0, 1\right[$. En outre, pour tout $\lambda \in \left]0, 1\right[$, on a $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(f_{1-1/\lambda}\right)$.

RAPPORT

COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

– Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
– Une copie soignée est appréciée.
– Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
– Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
– Vérifier la vraissemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
– L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Les questions informatiques sont désormais abordées par la moitié des candidats et, généralement, elles sont traitées correctement. Rappelons que ces questions sont assez largement valorisées au sein du barême de l'épreuve.

Avec une moyenne de 10,4 et un écart-type de 5,1, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1.

L'exercice (ainsi que les questions non mentionnées ci-dessous) a été convenablement réussi par une part importante des candidats.

A la question 1.b), la relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$ est devinée par une petite minorité de candidats et seuls les meilleurs candidats parviennent à la justifier correctement.

A la question 1.c), l'existence des coefficients a_k est justifiée par de nombreux candidats mais peu d'entre eux percoivent la stratégie à mener pour obtenir la seconde égalité : dériver j fois, évaluer en j, manipuler convenablement les indices avec soin puis déterminer correctement la valeur de $P_k^{(j)}(j)$. Seules les bonnes copies constatent que lorsque $j > k$, $P_k^{(j)}$ est le polynôme nul pour des raisons de degré.

La question 2.c) fut très discriminante. Beaucoup de candidats devinent la bonne valeur du rang mais assez peu de candidats sont capables d'apporter une réponse argumentée et correcte. De façon assez surprenante, il en est de même des valeurs propres alors que la matrice concernée est triangulaire.

La question 3.a) est abordée par 90 % des candidats et la définition du produit scalaire est largement connue des candidats. Par contre, la vérification du caractère défini positif a la plupart du temps échoué faute de précision et de réflexion véritable. Les bonnes copies ne s'y sont pas laissées prendre et ont utilisé la question 1.c). Inversement la justification « une somme de termes positifs ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls » est trop souvent absente des copies.

Pour finir, la question 3.b) est bien moins souvent abordée. Elle l'est avec succès parfois lorsque le candidat avait bien compris les questions 1.b) et 1.c).

EXERCICE 2.

Cet exercice fut particulièrement sélectif. Les questions 1,2 et 5 furent abordées par plus des deux tiers des candidats.

Il est surprenant de constater qu'assez peu de candidats savent justifier correctement le signe de $t \mapsto t^2 - t + 1$ sur $\mathbb{R}$ à la question 1 et une partie importante des candidats ne donne pas le signe correct de ψ sachant sa monotonie sur $\mathbb{R}_+^*$ et le fait que $\psi(1) = 0$.

A la question 2, si plus de la moitié des candidats a répondu correctement à la question mais près d'un tiers des candidats n'a su justifier ni la convergence, ni imaginer (ou établir) la valeur de la somme. La question 3 était inaccessible sans la réponse à la question 2 et, presque réciproquement, les candidats ayant répondu correctement à la question 2 ont obtenu la réponse convenable à la question 3.

A la question 5, si la définition des points critiques et le calcul des dérivées partielles sont corrects, moins de la moitié des candidats parvient à obtenir au moins l'une des trois relations voulues. Cela demande une certaine maitrise des calculs. Les conditions $x > 1$ et $y > 1$ ne sont obtenues que par les meilleurs candidats et les réciproques n'ont quasiment jamais été traitées.

Les autres questions sont traitées plus ou moins avec bonheur par une petite fraction des candidats (moins d'un quart).

PROBLEME.

PARTIE I. Etude des variables Y_n et Z_n.

Les questions informatiques ont été abordées par un nombre croissant de candidats (près de 50 % d'entre eux) et avec un succès lui aussi croissant (près de la moitié des points attribués à ces questions sont obtenus par les candidats ... les ayant abordées !). Rappelons néanmoins que pour déterminer le maximum d'un tableau, il ne s'agit pas de comparer chaque élément du tableau avec son voisin, mais de créer une variable contenant le maximum provisoire. C'est cette variable qu'on compare successivement aux éléments du tableau et qu'on met à jour dans la boucle.

Si le calcul des fonctions de répartition et des densités est généralement correct, les hypotèses précises pour qu'une fonction soit la fonction de répartition d'une variable à densité, ou pour qu'une fonction soit la densité d'une variable aléatoire, ne sont en général pas assez connues.

Malgré l'indication de la question 5, assez peu de candidats pensent à mobiliser leurs connaissances sur le produit de convolution notamment de l'invoquer sans parler de l'indépendance entre les variables Z_n et $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

La question 4 est peu réussie.

PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

Si la question 1.a) est bien traitée par un grand nombre de candidats, seuls les meilleurs d'entre eux parviennent à répondre correctement à la question 1.b).

Pour la question 2, les hypothèses classiques pour les fonctions intégrables sont rarement toutes vérifiées notamment la continuité. Pour l'obtention d'une domination de fonction $t \mapsto$

$\exp(-t)\, f(t)$, une part importante des candidats s'est basée sur l'une des deux assertions suivantes (qui sont toutes deux fausses) :

- «le produit de deux fonctions intégrables est intégrable»
- «une fonction intégrable au voisinage de l'infini tend forcément vers 0 au voisinage de l'infini».

La question 3 a posé beaucoup de problèmes. Une quantité non négligeable de candidats introduit une primitive de $G : t \mapsto \exp(-t)\, f(t)$ (ce qui est une bonne chose), commettent l'erreur classique : $\int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t) dt = G(x) - \lim_{+\infty} G$ puis ils affirment que la dérivée de $x \mapsto G(x) - \lim_{+\infty} G$ est la fonction $x \mapsto G'(x) - \lim_{+\infty} G'$ (ce qui est une mauvaise chose).

La question 4 est assez peu réussie sauf la relation (β) et le passage formel à la limite quand $A \to +\infty$.

Les questions suivantes sont abordées par une nombre très faible de candidats.

PARTIE III. Etude de l'application $f \mapsto k_f$.

La question 1 est réussie par un grand nombre de candidats. Pour la question 2, la majorité des candidats abordant la question (50 %) calcule l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-t} dt$ mais seule une faible fraction des candidats détermine l'espace propre auquel appartient f_a et le fait que f_a ne soit pas le vecteur nul est rarement mentionnée. Les autres questions sont assez peu abordées.